APRIL/MAY 2025

# CMA61 — LINEAR ALGEBRA

Time : Three hours Maximum : 75 marks

## SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions.

1. If $S \subseteq T$ then prove that $L(S) \subseteq L(T)$.

   $S \subseteq T$ எனில் $L(S) \subseteq L(T)$ என நிறுவுக.

2. If $v$ is a vector space over $F$, then prove that $ov = 0, \forall v \in v$.

   $F$ மீதான வெக்டர் வெளி $v$ எனில் $ov = 0$, எல்லா $\forall v \in v$ -க்கு நிறுவுக.

3. Define Dual Space.

   இரும வெளியை வரையறு.




4. Define Orthogonal set.

   செங்குத்து கணத்தை வரையறு.

5. Write the characteristic vector.

சிறப்பியல்பு வெக்டரை எழுதுக.

6. Give an example of an algebra over $F$.

$F$ -ன் மீதான இயற்கணிதத்திற்கு எடுத்துக்காட்டு தருக.

7. Find a matrix of $T \in A(v)$ in the basis $\{v_1, v_2 \dots v_n\}$.

$\{v_1, v_2 \dots v_n\}$ என்ற அடிப்படையில் $T \in A(v)$ அணியைக் காண்க.

8. When should $S, T \in A(v)$ is similar?

எப்போது $S, T \in A(v)$ ஒத்ததாக அமையும்?

9. Define Skew-Symmetric matrix.

கோணிய சமச்சீர் அணியை வரையறு.

10. Write the secular equation of a matrix.

பொதுநிலைச் சமன்பாட்டை பற்றி கூறுக.






18. If $A$ is an algebra with unit element over $F$, then show that $A$ is isomorphic to a subalgebra of $A(v)$ for some vector space $v$ over $F$.

$A$ என்பது அலகு உறுப்பு கொண்ட $F$-ன் மீதான இயற்கணிதம் எனில் $A$ என்பது $F$-ன் மீதான ஏதேனும் ஒரு வெக்டர் வெளி $v$-க்கு, $A(v)$-ன் உள் இயற்கணிதத்திற்கு இயல்மாறா கோர்த்தலாக இருக்கும் என நிரூபி.

19. Show that if $v$ is $n$-dimensional over $F$ and if $T \in A(v)$ has all its characteristic roots in $F$, then $T$ satisfy a polynomial of degree $n$ over $F$.

$F$-ல் $v$ என்பது $n$-பரிமாணம் உடையது $F$-ன் சிறப்பு மூலங்கள் அனைத்தும் $T \in A(v)$ இருந்தால் $F$-ல் $T$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் $n$-ன் கோணத்தை நிறைவு செய்யும் எனக் காட்டுக.

20. Show that for $A, B \in F_n$, $\det(AB) = (\det A)\det(B)$.

$A, B \in F_n$, $\det(AB) = (\det A)\det(B)$ எனக் காட்டுக.

---

(b) Prove that $\det A = \det(A')$.

$\det A = \det(A')$ என நிறுவுக.

SECTION C — ($3 \times 10 = 30$ marks)

Answer any THREE questions.

16. If $v$ is finite dimensional and $w$ is a subspace of $v$, then prove that

(a) $\dim(w) \leq \dim(v)$,

(b) $\dim(v/w) = \dim(v) - \dim(w)$.

$v$ முடிவுறு பரிமாணம் கொண்டது மற்றும் $w$ அதன் உள்வெளி எனில்

(அ) $\dim(w) \leq \dim(v)$,

(ஆ) $\dim(v/w) = \dim(v) - \dim(w)$ என நிரூபி.

17. If $v$ and $w$ are of dimensions $m$ and $n$ respectively over $F$ then show that $Hom(v,w)$ is of dimension $mn$ over $F$.

$F$-ல் $v$ மற்றும் $w$ என்பவை $m$ மற்றும் $n$ பரிமாணங்கள் $mn$ உடையது எனக் காட்டுக.






SECTION B — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer ALL questions.

11. (a) In $v_3(R)$, show that the vectors $(1, 4, -2), (-2, 1, 3)$ and $(-4, 11, 5)$ are linearly dependent.

$v_3(R)$-ல் $(1, 4, -2), (-2, 1, 3)$ மற்றும் $(-4, 11, 5)$ என்ற வெக்டர்கள் ஒருபடித்தான சார்பு எனக் காட்டுக.

Or

(b) If $v_1, v_2, \ldots, v_n$ is a basis of $v$ over $F$ and if $w_1, w_2 \ldots w_m$ are linearly independent over $F$, then prove that $m \leq n$.

$v_1, v_2, \ldots, v_n$ என்பது $v$-ன் அடிப்படை மேலும் $w_1, w_2 \ldots w_m$ நேரியல் சாராதவை எனில் $m \leq n$ என நிறுவுக.

12. (a) Prove that $A(A(W)) = W$.

$A(A(W)) = W$ என நிறுவுக.

Or

(b) If $W$ is a subspace of a finite dimensional inner product space $V$ over $F$ then prove that $V = W \oplus W^{\perp}$.

$W$ என்பது $V$ என்ற முடிவுறு பரிமாணம் கொண்ட உட்பெருக்கல் வெளியின் உள்வெளியாக இருப்பின் $V = W \oplus W^{\perp}$ என நிறுவுக.

13. (a) If $V$ is finite dimensional over $F$, then $T \in A(V)$ is regular $\Leftrightarrow T$ maps $V$ onto $V$.

$V$ என்பது $F$-ன் மீதான முடிவுறு பரிமாணமுள்ள வெக்டர்வெளி எனில் $T \in A(V)$ ஒழுங்கானது $\Leftrightarrow T$ என்பது முழுக்கோப்பு என நிரூபி.

Or

(b) Show that the element $\lambda \in F$ is a characteristic root of $T \in A(V)$ iff for some $V \neq 0$ in $V, VT = \lambda V$.

$\lambda \in F$ என்ற உறுப்பு $T \in A(V)$-ல் சிறப்பு மூலத்தினை உடையதாக இருக்கும் போது $V \neq 0$ என்பது $V$-ல் இருந்தால் $VT = \lambda V$ எனக் காட்டுக.






14. (a) If $T \in A(v)$ has all its characteristic root in $F$, then there is a basis of $v$ in which the matrix of $T$ is triangular.

$T \in A(v)$ அதன் அனைத்து சிறப்பியல்பு மூலங்களையும் $F$-ல் கொண்டிருந்தால் $T$-ன் அணியை முக்கோணமாக கொண்ட $v$-ன் அடிகணம் இருக்கும் என நிரூபி.

Or

(b) Show that if $v$ is $n$-dimensional over $F$ and if $T \in A(v)$ has all its characteristic roots in $F$.

$F$-ல் $v$ என்பது $n$-பரிமாணம் உடையது $F$-ன் சிறப்பு மூலங்கள் அனைத்தும் $T \in A(v)$ல் இருந்தால் $F$-ல் $T$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் $n$-ன் கோணத்தை நிறைவு செய்யும் எனக் காட்டுக.

15. (a) If $F$ is of characteristic 0 and if $S$ and $T$, in $A_F(v)$, are such that $ST - TS$ commutes with $S$, then prove that $ST - TS$ is nilpotent.

$F$-ல் 0 என்பது சிறப்பு புள்ளி மேலும் $S$ மற்றும் $T$ என்பவை $A_F(v)$ இருக்கும்போது $S$-ல் $ST - TS$ வழக்கமாக இருந்தால் $ST - TS$ இன்ம அடுக்கு உடையது என காட்டுக.

Or